2B

УДК 519.4

Н.А. Володин[1], Ю.В. Ильина[1], О.В. Александрова[2], Н.В. Щебетовская[2]
[1]Донецкий национальный технический университет, Украина
Украина, 83050, г. Донецк, пр. Богдана Хмельницкого, 84
[2]Донбасская национальная академия строительства и архитектуры (ДонНАСА), Украина
Донецкая обл., г. Макеевка-23, ул. Державина, 2

Идентификация непрерывной функции в одномерном параболическом уравнении

N.A. Volodin[1], Y.V. Ilyina[1], O.V. Aleksandrova[2], N.V. Schebetovskaya[2]
[1]Donetsk National Technical University, Ukraine
Ukraine, 83050, c. Donetsk, Bogdana Khmelnitskogo av.
[2]Donbas National Academy of Engineering and Architecture (DonNASA)
Donetsk area. Makeevka-23 of, st. Derzhavina, 2

Authentication of Continuous Function is in Unidimensional Parabolic Equalization

М.О. Володін[1], Ю.В. Ільїна[1], О.В. Александрова[2], Н.В. Щебетовська[2]
[1]Донецький національний технічний університет, Україна
Україна, 83050, м. Донецьк, пр. Богдана Хмельницького, 84
[2]Донбаська національна академія будівництва і архітектури (ДонНАСА)
Донецька обл., м. Макіївка-23, вул. Державіна, 2

Ідентифікація безперервної функції в одновимірному параболічному рівнянні

В статье рассматривается задача идентификации непрерывной функции параболического уравнения в частных производных. Найдено аналитическое выражение для расчёта градиента неявно заданного функционала. Для определения градиента используется модернизированный классический метод множителей Лагранжа.
Ключевые слова: идентификация, непрерывная функция, градиент.

In the article the task of authentication of parameter is examined as a continuous function of parabolic equalization is in partials. Analytical expression is found for the calculation of gradient of the non–obvious set functional. Gradient is used to determine the modernized classical method of Lagrange multipliers.
Key words: authentication, continuous function, gradient.

Розглядається задача ідентифікації параметра у вигляді безперервної функції параболічного рівняння в приватних похідних. Знайдено аналітичне вираження для розрахунку градієнта неявно заданого функціонала. Для визначення градієнта використовується модернізований класичний метод множників Лагранжа.
Ключові слова: ідентифікація, безперервна функція, градієнт.

Пусть в пространственно-временной области $\Sigma = [x_0, x_2] \times [t_a, t_b]$ функция $f(x,t)$ удовлетворяет квазилинейному параболическому уравнению:

$$\alpha(f)\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0, \ (t,x) \in \Sigma, \qquad (1)$$

где $\alpha(f)$, $\beta(x,t)$ непрерывные или кусочно-непрерывные функции.

Будем считать, что в области $\Sigma_1 = [x_0, x_1] \times [t_a, t_b]$ функция $\beta(x,t) \equiv \beta(t)$, а в области $\Sigma_2 = \Sigma \setminus \Sigma_1 = [x_1, x_2] \times [t_a, t_b]$ функция $\beta(x,t)$ задана и принимает значение β_1. Поэтому можно записать

$$\beta(x,t) = \beta_1 + [\beta_e(t) - \beta_1]\theta(x - x_1), \qquad (2)$$

где β_e – непрерывная идентифицируемая функция. При этом уравнение (1) преобразуется к виду:

$$\alpha(f)\frac{\partial f}{\partial t} - \beta(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - (\beta_e - \beta_1)\delta(x - x_1)\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \ (t,x) \in \Sigma. \qquad (3)$$

Граничные условия зададим в виде:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} = 0, \qquad \beta_1 \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_2} = -\gamma(f - f_1), \qquad (4)$$

где γ, f_1 – некоторые константы.

Начальное условие имеет вид:

$$f(t_a, x) = F_a(x), x \in [x_0, x_2]. \qquad (5)$$

Качество идентификации функции $\beta_e(t)$ оценим функционалом:

$$J(\beta_e) = \int_{t_a}^{t_b} [f(t, x_c) - f_e(t, x_c)]^2 \, dt, \qquad (6)$$

где f_e – экспериментально определенная функция $f(t, x_c)$, $x_c \in [x_0, x_1)$.

Сформулируем задачу идентификации следующим образом. Необходимо найти непрерывную функцию $\beta_e(t)$ в уравнении (3), которая доставляет минимум целевому функционалу $J(\beta_e)$.

Наиболее эффективными методами идентификации являются прямые экстремальные методы [1-4]. Они используют градиент целевого функционала для итерационных коррекций идентифицируемого параметра.

Получим аналитическое выражение градиента целевого функционала $J(\beta_e)$. Методом определения градиента в настоящей работе, как и в работах [4-6], является модернизированный классический метод множителей Лагранжа [2]. Данный метод включает в себя следующие этапы: 1) линеаризация уравнения (1) и целевого функционала (6) относительно $\delta f \in V(\Sigma)$, $\delta \beta \in U(\Sigma)$; 2) отображение линеаризованных уравнений и функционала в пространство R; 3) преобразование получившихся отображений вариаций к отображениям независимых вариаций δf и $\delta\beta$; 4) объединение элементов задачи идентификации в одинаковых пространствах; 5) выделение градиента целевого функционала. Через $V(\Sigma)$ и $U(\Sigma)$ обозначены пространства состояний и управлений, соответственно, $V(\Sigma), U(\Sigma) \in L_2$, где L_2 – пространство функций с интегрируемым квадратом. Перейдем к определению градиента ∇J.

Уравнение (3) для дальнейших преобразований, удобно записать в виде системы с формальной переменной $q \equiv \beta(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\begin{cases} \alpha(f)\dfrac{\partial f}{\partial t} - \dfrac{\partial q}{\partial x} = 0, & (t,x) \in \Sigma, \\ q - \beta\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, & (t,x) \in \Sigma. \end{cases} \qquad (7)$$

Система уравнений, линеаризованная относительно $\delta f \in V(\Sigma)$, $\delta \beta \in U(\Sigma)$, имеет вид:

$$\begin{cases} e_1 = \alpha(f)\dfrac{\partial \delta f}{\partial t} - \dfrac{\partial \delta q}{\partial x} = 0 & \in V(\Sigma), \\ e_2 = \delta q - \dfrac{\partial f}{\partial x}\delta\beta - \beta\dfrac{\partial \delta f}{\partial x} = 0 & \in V(\Sigma). \end{cases} \tag{8}$$

Граничные и начальные условия имеют вид:

$$\delta q\big|_{x=x_0} = 0, \quad \delta q\big|_{x=x_2} = -\gamma\delta f, \tag{9}$$

$$\delta f(t_a, x) = 0. \tag{10}$$

Линеаризованный функционал (6) принимает вид:

$$\delta J = \int_{t_a}^{t_b} 2(f(t,x_c) - f_e(t,x_c))\delta f dt = (2(f - f_e), \delta f)\big|_{V^*(\Sigma)} \in R, \tag{11}$$

где звездочка над символом обозначает пространство, сопряженное к исходному.

Для отображения линеаризованной системы (8) в пространство R введем линейный функционал-вектор $g = \{g_1, g_2\} \in V^*(\Sigma)$. Умножим скалярно данный функционал на вектор $e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$:

$$(g,e) = \int_{t_a}^{t_b}\int_{x_0}^{x_2}(g_1 e_1 + g_2 e_2)dtdx = 0 \in R. \tag{12}$$

Преобразуем выражение (12) к виду скалярного произведения относительно вариаций δf, δq. Для этого необходимо преобразовать следующие слагаемые:

$$g_1\alpha(f)\frac{\partial \delta f}{\partial t} = \frac{\partial \alpha(f) g_1 \delta f}{\partial t} - \alpha(f)\frac{\partial g_1}{\partial t}\delta f;$$

$$g_1\frac{\partial \delta q}{\partial x} = \frac{\partial g_1 \delta q}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial x}\delta q;$$

$$g_2\beta\frac{\partial \delta f}{\partial x} = \frac{\partial g_2 \beta \delta f}{\partial x} - \frac{\partial g_2 \beta}{\partial x}\delta f.$$

Полученные дополнительные слагаемые в виде производных легко интегрируются по x и t в выражении (12). Окончательно, с учетом (9), (10), получаем:

$$(g,e) = \int_{t_a}^{t_b}\int_{x_0}^{x_2}\left[\left(-\alpha(f)\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial g_2 \beta}{\partial x}\right)\delta f - g_2\frac{\partial f}{\partial x}\delta\beta + \left(g_2 + \frac{\partial g_1}{\partial x}\right)\delta q\right]dxdt +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_2}\alpha(f)g_1\delta f\big|_{t_b}dx - \int_{x_0}^{x_2}\alpha(f)g_1\delta f\big|_{t_a}dx - \int_{t_a}^{t_b}(g_1\delta q + \beta g_2\delta T)\big|_{x_2}dt +$$

$$+ \int_{t_2}^{t_b}(g_1\delta q + \beta g_2 \delta T)\big|_{x_0} = 0 \quad \in R. \tag{13}$$

Теперь можно объединить выражение (13) с линеаризованным функционалом (11). Для того чтобы избавиться от компоненты, принадлежащей сопряженному пространству $V^*(\Sigma)$, потребуем:

$$\begin{cases} \alpha(f)\dfrac{\partial g_1}{\partial t} - \dfrac{\partial \beta g_2}{\partial x} - 2(f - f_e) = 0 & \in V^*(\Sigma), \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x} + g_2 = 0 & \in V^*(\Sigma). \end{cases} \tag{14}$$

Исключая из уравнений (14) линейный функционал g_2, с учетом (2), получаем уравнения для определения функционала g_1. Далее удобно ввести обозначение $g \equiv g_1$, в итоге получаем:

$$\alpha(f)\frac{\partial g}{\partial t} + \beta\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + (\beta_e - \beta_1)\delta(x - x_1)\frac{\partial g}{\partial x} -$$
$$- 2(f - f_e)\delta(x - x_c) = 0 \in V^*(\Sigma). \tag{15}$$

В конечный момент времени и на обеих границах потребуем:

$$g\big|_{t=t_b} = 0; \tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=x_0} = 0; \quad \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=x_2} = -\gamma g. \tag{17}$$

При этом вариация функционала принимает вид:

$$\delta J = \int_{t_a}^{t_b}\int_{x_0}^{x_2} \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\delta\beta dt dx = (\nabla J, \delta\beta)_{U^*(\Sigma)}, \tag{18}$$

где градиент

$$\nabla J = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \ (t, x) \in (t_a, t_b) \times x_*, \tag{19}$$

где $x_* \in [x_0, x_2]$. Конкретное значение x_* должно определяться в результате анализа управляемости, а точнее – идентифицируемости [2].

Нетривиальное решение сопряженной задачи (15) – (17) возможно только при $x_c < x_* < x_1$. Это объясняется наличием δ-функции в уравнении (15) при линеаризованном целевом функционале. Именно этот свободный член является источником нетривиального решения. При интегрировании уравнения (15) δ-функция преобразуется к ϑ-функции отличной от нуля справа от x_c. Следовательно, параболическая система (15) – (17) при приблизительном численном решении может иметь гарантированное существенно ненулевое (нетривиальное) решение g справа от x_c.

Таким образом, функция $\beta_e(t)$ идентифицируема на S по целевому функционалу (6), если $S = (t_a, t_b) \times x_*$, $x_c < x_* < x_1$.

На основе градиента (19) организуется направленная итерационная коррекция функции $\beta_e(t)$ [2], [3]:

$$\beta^{k+1}(t) = \beta^k(t) - b^k\alpha(t)\nabla J^k(t). \tag{20}$$

Здесь глубина спуска на каждой итерации вдоль выбранного направления минимизации $b^k\alpha(t)\nabla J^k(t)$ определяется числом b^k по методу:

$$\begin{cases} \text{если } J^{k+1} \le J^k, & \text{тогда } b^{k+1} = b_1 b^k, \ b_1 > 1; \\ \text{если } J^{k+1} > J^k, & \text{тогда повторяется предыдущая итерация, при } b^{k-1} = b_2 b^k; \ 0 < b_2 < 1. \end{cases} \tag{21}$$

Функция $\alpha(t) > 0$. Если $\alpha(t) = 1$, то алгоритм (20) принимает вид алгоритма наискорейшего спуска [2], [4]. В выражении (21) принималось $b_1 = 1.2$, $b_2 = 0.5$. Функция $\alpha(t)$ регулирует направление спуска и определяется из условия не более 15% первого изменения идентифицируемой функции $\beta_e(t)$:

$$\alpha(t) = \left| \frac{0.15\beta_e^{\,0}(t)}{\nabla J^0(t)} \right|. \qquad (22)$$

На рис. 1 приведены результаты идентификации коэффициента $\beta_e(t)$ за 21 итерацию для реального процесса затвердевания стального расплава в изложнице на основе экспериментальных данных [7].

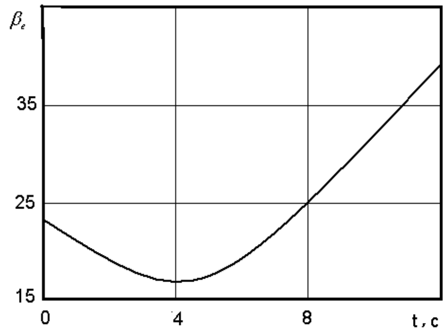


Рисунок 1 – Идентифицированный коэффициент $\beta_e(t)$

Максимальное расхождение функции состояния составило всего лишь

$$\max\left| f - f_e \right| = 6^{\circ}\,\text{C}.$$

Это высокая точность моделирования процессов, описываемых математическими моделями с дифференциальными уравнениями параболического типа.

Литература

1. Kelley C.T. Iterative Methods for Optimization / Kelley C.T. – SIAM. – 1999. – 188 p.
2. Толстых В.К. Прямой экстремальный подход для оптимизации систем с распределенными параметрами / Толстых В.К. – Донецк : Изд. «Юго-Восток», 1997. – 177 с.
3. Tolstykh V.K. Minimithing in Hilbert Spaces / V.K. Tolstykh // Abs. Sump. Operations Research. – Passau-Germany : Springer, 1995. – P. 45.
4. Толстых В.К. Эффективный метод оптимизации физических процессов / В.К. Толстых // Инженерно-физический журнал. – 2003. – № 2, Т. 76. – С. 160-162.
5. Tolstykh V.K. Optimal control by heat flow in continuous casting steel / V.K. Tolstykh, N.A. Volodin Proc. Sump. Operations Research, Braunschweig, Germany,1996. – P. 480-483.
6. Володин Н.А., Толстых В.К. Развитие теоретических основ оптимизации и идентификации параметров в слитках и отливках. – Донецк : ИПИИ «Наука і освіта». – 2008. – 132 с.
7. Процессы литья / Бородин В.С., Мешков В.М., Петренко Л.П., Гридин С.В. –1992. – №3. – С. 29-32.

Literatura

1. Kelley C. T. Iterative Methods for Optimization. SIAM. 1999. 188 p.
2. Tolstyh V.K. Prjamoj jekstremal'nyj podhod dlja optimizacii sistem s raspredelennymi parametrami. Doneck: Izd. "Jugo-Vostok". 1997. 177 s.

3. Tolstykh V.K. Minimithing in Hilbert Spaces // Abs. Sump. Operations Research/. Passau-Germany: Springer. 1995. P. 45.
4. Tolstyh V.K. Jeffektivnyj metod optimizacii fizicheskih processov. Inzhenerno-fizicheskij zhurnal. № 2. T. 76. 2003. S.160-162.
5. Tolstykh V.K. Optimal control by heat flow in continuous casting steel. Proc. Sump. Operations Research, Braunschweig, Germany. 1996. P. 480-483.
6. Volodin N.A. Razvitie teoreticheskih osnov optimizacii i identifikacii parametrov v slitkah i otlivkah. Doneck: IPII “Nauka i osvita”. 2008. 132 s.
7. Borodin V.S. Processy lit’ja. 1992. № 3. S. 29-32.

RESUME

N.A. Volodin, Y.V. Ilyina, O.V. Aleksandrova, N.V. Schebetovskaya

Authentication of Continuous Function
is in Unidimensional Parabolic Equalization

In the article the task of authentication of parameter is examined as a continuous function of parabolic equalization is in partials. Analytical expression is found for the calculation of gradient of the non–obvious set functional. Gradient expressed in terms of the associated parabolic equation. The effective methods of authentication are select direct extreme methods which use the gradient of having a special purpose functional for the iteration corrections of the identified parameter. The results can be used in the construction of mathematical models of solidification of castings without explicit allowance for convection, but with effective coefficients.

Статья поступила в редакцию 29.08.2012.